Abituraufgaben

Berufliche Gymnasien BW

Anwendungsaufgaben mit Matrizen

Lineare Optimierung

aus den Jahren ab 2005

Bis jetzt sind 21 komplette Abituraufgaben vorhanden

Datei Nr. 74131

Stand 15. November 2016

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Da ich die Lizenz besitze, sämtliche Aufgaben der Haupt-Abiturprüfungen aus Baden-Württemberg zu veröffentlichen, baue ich eine große Sammlung auf. Nun findet man solche Aufgaben öfters im Internet. Doch meine ausführlichen Lösungen mit intensiver Besinnung auf die Grundlagen, ist sicher einmalig und hilfreich für Schüler / und auch Lehrer bzw. Referendare. Ich verwende ab und zu CAS-Screenshots, obwohl diese Aufgaben in der Regel nur mit GTR gelöst werden sollen.

Teil 2 dieser Sammlung: Prüfungsaufgaben der beruflichen Gymnasien.

74011	**Analysis Teil 1**	**2000 bis 2009**	**in Planung (Dieser Text)**	
74012	Analysis Teil 2	ab 2010		
74013	Analysis Teil 3	Anwendungsaufgaben 2005 bis 2009		
74014	Analysis Teil 4	Anwendungsaufgaben ab 2010		
74020	**Analysis spezial**:	Trigonometrische Funktionen ab 2002		
74030	Vektorgeometrie 0	1982 bis 1999		
74031	Vektorgeometrie 1	2000 bis 2005	in Arbeit	
74032	Vektorgeometrie 2	ab 2006		
74111	Matrizenrechnung	Betriebliche Verflechtungen Leontief-Modell		1982 bis 2016
74120	Matrizenrechnung	Bedarfstabellen, Kostenrechnungen		1982 bis 1999
74121	Matrizenrechnung	Bedarfstabellen, Kostenrechnungen		ab 2000
74122	**Matrizenrechnung spezial:**	Ausgewählte Anwendungsaufgaben		
74131	Lineare Optimierung	ab 2005		
74210	Stochastik	vor 2000	in Planung	
74211	Stochastik	2000 bis 2004		
74212	Stochastik	2005 bis 2009		
74213	Stochastik	ab 2010		

Teil 3: Fachhochschulreifeprüfung / Berufskolleg

74301	Analysis 1 – ganzrational (+ Exp.)	2002 - 2008	*noch ohne Lösungen*
74302	Analysis 2 – ganzrational (+ Exp.)	ab 2009	
74305	Analysis 3 – Exponentialfunk. (+ ganzrat.)	2002 - 2009	*noch ohne Lösungen*
74306	Analysis 4 – Exponentialfunk. (+ trigon. F.)	ab 2010	*noch ohne Lösungen*
74311	Analysis 5 – Trigonometrische Funktionen ab 2002		
74321	Vektorgeometrie – noch ohne Lösungen		
74331	Matrizenrechnung: wirtschaftliche Anwendungen		
74341	Stochastik		
74251	Wirtschaftsrechnen: Kosten- und Gewinnfunktionen		

Zum Inhalt:

Seit etwa 1950 gibt es für Optimierungsaufgaben die sogenannten **Simplex-Verfahren**.
Die einfache Form ist die reguläre Simplexmethode, die vor allem in berufsbildenden Schulen Eingang gefunden hat und in einigen Bundesländern Bestandteil der Abiturprüfungen ist.

Die neue Grundidee bei diesen Verfahren ist die Umwandlung der bei der linearen Optimierung auftretenden Ungleichungen in Gleichungen, indem man zusätzlich Variable (Schlupfvariable) einführen, die den fehlenden Rest übernehmen sollen.

Ich habe mich dieses hochinteressanten Stoffes aus der Wirtschaftsmathematik angenommen, weil er mich interessiert hat und vor allem weil Bedarf da ist. Diese Methoden sind für viele Lehrer neu, und sie sind für Hilfe und Anregungen dankbar.

Außerdem suchen natürlich Schüler eine Möglichkeit, diesen Stoff zu verstehen und zu üben. Ich weiß, dass viele Schulen unter einem enormen Zeitdruck stehen, den Stoff durch zu bringen. So fällt sehr oft die Hinführung etwas knapp aus, sonst steht nicht mehr genug Zeit zum Üben zur Verfügung. Daher gliedere ich meine Texte zur Optimierung in 5 Teile:

52100	Lineare Optimierung – Grafisches Verfahren
52101	Aufgabensammlung zu 52100
52110	Reguläres Simplexverfahren
52111	Aufgabensammlung zu 52110
74131	Sammlung von Abituraufgaben aus Baden-Württemberg **(dieser Text)**

Inhalt

Abitur 2005 II-A (BG in BW)

Aufgabe mit nicht eindeutiger Lösung

Das neue Lager eines Holzschnitzel-Heizwerks soll mit Holzschnitzeln der Holzsorten Nadelholz, Laubmischholz und Buche befüllt werden.
Die Holzsorten unterscheiden sich sowohl in ihrem Heizwert als auch in ihrem Preis.
Der Heizwert beträgt pro Volumeneinheit für Nadelholz 4 Einheiten, für Laubmischholz 5 Einheiten und für Buchenholz 6 Einheiten.
Bei einem Händler kostet eine Volumeneinheit Nadelholz 1 Geldeinheit, Laubmischholz 1,5 Geldeinheiten und Buchenholz 2 Geldeinheiten.
Das Lager fasst nicht mehr als 2000 Volumeneinheiten und die Gesamtkosten für die Holzschnitzel dürfen 3200 Geldeinheiten nicht überschreiten.
Die Mischung der drei Holzsorten soll einen möglichst hohen Heizwert haben.

a) Bestimmen Sie die optimale Mischung vom Nadelholz und Laubmischholz grafisch, wenn vom Buchenholz genau 850 Volumeneinheiten gekauft werden. Wegen Sturmschäden wird Nadelholz billiger.
Erläutern Sie anhand Ihrer Zeichnung, wie sich die optimale Mischung und deren Heizwert verändern.

b) Berechnen Sie mithilfe des Simplexverfahrens die optimale Mischung der drei Holzsorten, wenn vom Buchenholz höchstens 1000 Volumeneinheiten gekauft werden. Geben Sie den Heizwert dieser Mischung an.

Lösung 2005 II-A

a) **Grafische Lösung**

1. Schritt: Variablendefinition:

Es sei x die benötigte Menge Nadelholz,
y die Menge Laubmischholz und
z die Menge Buchenholz.
Für diese Variablen gilt die Nichtnegativitätsbedingung: $x \geq 0$, $y \geq 0$ und $z \geq 0$.

2. Schritt: Einschränkungen:

Gesamtmenge: $x + y + z \leq 2000$ (1)

Preise: 1 VE Nadelholz kostet 1 GE,
1 VE Laubmischholz 1,5 GE und
1 VE Buchenholz 2 GE.

Gesamtkosten: $x + 1{,}5y + 2z \leq 3200$ (2) (Kostenfunktion: $k(x,y,z) = x + 1{,}5y + 2z$)

3. Schritt: Zielfunktion definieren

Gesucht ist der maximale Heizwert.

Gegeben: Heizwert von Nadelholz: 4 E (Einheiten).
Laubmischholz: 5 E und
Buchenholz: 6 E.

Als Zielfunktion definiert man also die Heizwertfunktion $\boxed{h(x,y,z) = 4x + 5y + 6z}$.

4. Schritt: Grafische Lösung: Da z = 850 vorgegeben ist, liegen nur noch zwei Variable vor, so dass eine grafische Lösung möglich wird.

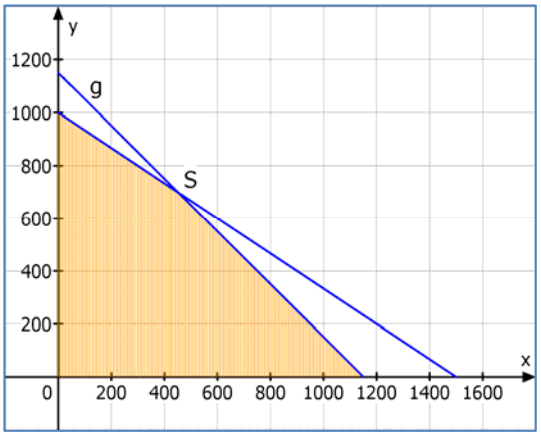
Aus $x + y + z \leq 2000$ (1) folgt: $x + y + 850 \leq 2000 \Leftrightarrow y \leq -x + 1150$ (1')

Aus $x + 1{,}5y + 2z \leq 3200$ (2) folgt: $x + 1{,}5y + 1700 \leq 3200 \Leftrightarrow 1{,}5y \leq -x + 1500 \quad |:1{,}5$

$y \leq -\frac{2}{3}x + 1000$ (2')

Die Planungsfläche wird also nach oben durch die Gerade g: $y = -x + 1150$
und durch die Gerade k: $y = -\frac{2}{3}x + 1000$ begrenzt.

Nach links wird es wegen $x \geq 0$ durch die y-Achse begrenzt,
nach unten wegen $y \geq 0$ durch die x-Achse.



5. Schritt:

Berechnung des Schnittpunkts von g und k:

$-\frac{2}{3}x + 1000 = -x + 1150 \quad | + x$

$\frac{1}{3}x = 150 \quad | \cdot 3$

$x_S = 450$,

In g: $y_S = -450 + 1150 = 700$

$S(450 \mid 700)$

6. Schritt: Die Zielfunktion lautet für z=850: $h(x,y,850) = 4x + 5y + 5100$

Gleichung der Zielgeraden: $5y = -4x - 5100 + h$

$y = -\frac{4}{5}x + \frac{h-5100}{5}$

Zur Abkürzung sei $n = \frac{h-5100}{5}$.

Damit lautet die Zielgeradenschar: $y = -\frac{4}{5}x + n$

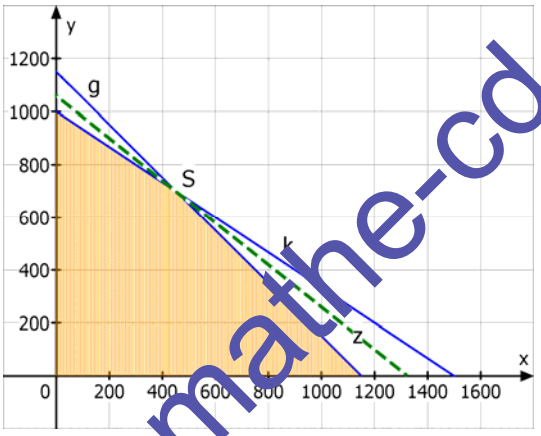
Lage der Zielgeraden: Für ihre Steigung gilt: $\boxed{-\frac{2}{3} = m_K < m_z = -\frac{4}{5} < m_g = -1}$

Wenn man die Gerade aussucht, die durch S geht, liegt sie zwischen den Geraden.

Punktprobe mit $S(450\,|\,700)$ liefert: $700 = -\frac{4}{5}450 + n \quad \Leftrightarrow \quad n = 700 + 360 = 1060$

Diese Gerade hat die Gleichung:

$y = -\frac{4}{5}x + 1060$



Würde der Achsenabschnitt größer sein, träfe die Zielgerade z die Planfläche nicht mehr.

Aus $n = \frac{h-5100}{5}$ folgt: $h = 5n + 5100$

$h_{max} = 5 \cdot 1060 + 5100 = 10400$

Dies ist der **maximale Heizwert**.

Man kann diesen auch so berechnen:

Er gehört zu den Werten x = 450, y = 700 (die Koordinaten von S) und z = 850 (vorgegeben):

$\boxed{h(450,700,850) = 4 \cdot 450 + 5 \cdot 700 + 6 \cdot 850 = 10.400}$

Zusatz: Wenn Nadelholz billiger wird, also beispielsweise statt 1 GE nur noch 0,75 GE kostet, ändert sich die Kostenbedingung (2) in $0{,}75 \cdot x + 1{,}5y + 2z \le 3200$.

Mit z = 850 folgt. $0{,}75 \cdot x + 1{,}5y + 1700 \le 3200$

bzw. $0{,}75 \cdot x + 1{,}5y \le 1500$.

Damit ändert sich die Lage der Grenzgeraden $\frac{3}{2}y = -\frac{3}{4}x + 1500 \quad |:1{,}5 \;\hat{=}\; \cdot\frac{2}{3}$

$y = -\frac{1}{2}x + 1000$

Bei gleichem Absolutglied wird die Gerade flacher. Damit ändert sich der Schnittpunkt:

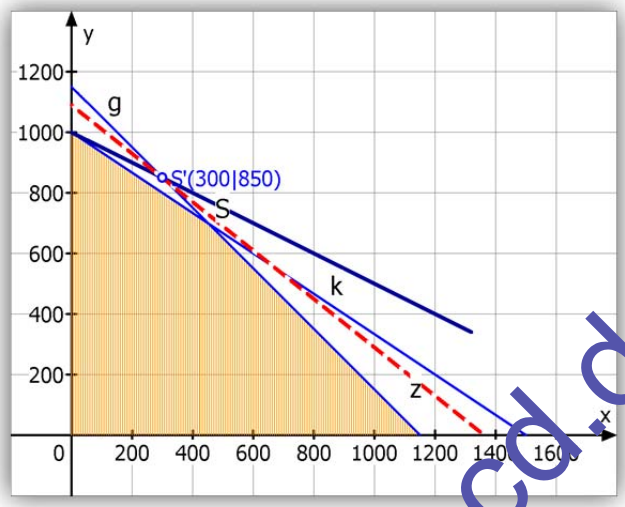
$-\frac{1}{2}x + 1000 = -x + 1150 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x = 150 \quad \Leftrightarrow \quad x_S = 300, \quad y_S = 850: \quad S'(300\,|\,850)$

Die Zielgerade $y = -\frac{4}{5}x + n$ geht nun durch S': $850 = -\frac{4}{5} \cdot 300 + n \quad \Leftrightarrow \quad n = 1090$

Neuer Heizwert somit: $n = \frac{h-5100}{5} \quad \Leftrightarrow \quad h = 5n + 5100 = 10.550$

Oder so: $\boxed{h(300,850,850) = 4 \cdot 300 + 5 \cdot 850 + 6 \cdot 850 = 10550}$

Hinweis: Ich habe dies nochmals ganz durchgerechnet. Dies war aber nicht verlangt. Man sollte nur anhand der Zeichnung erläutern, wie sich die optimale Mischung und damit der Heizwert ändert.



Dies hätte als Lösung ausgereicht:

Die Nadelholzkosten verbilligen sich z. B. von 1 GE auf 0,75 GE je Volumeinheit. Damit lautet die neue Kostenbedingung $0{,}75 \cdot x + 1{,}5y \le 1500$ und als Grenzgerade folgt daraus $y = -\frac{1}{2}x + 1000$.

Im Vergleich zu vorher verläuft diese bei gleichem Absolutglied (also Schnittstelle auf der y-Achse) flacher. Der Schnittpunkt mit g liegt somit höher im Koordinatensystem. Der Anteil x wird also kleiner und y wird größer.

Das heißt, dass man weniger Nadelholz und mehr Laubmischholz kaufen wird.

Da die Zielgeraden alle dieselbe Steigung haben, verläuft die neue Zielgerade durch S' höher als zuvor, hat somit einen größeren y-Achsenabschnitt als zuvor, was einen höheren Heizwert bedeutet, weil $n = \frac{h-5100}{5}$ gilt.

b) Nun ändert sich die Einkaufsstrategie, denn die Bedingung z = 850 VE Buchenholz wird ersetzt durch $z \le 1000$ VE. Da nunmehr drei Variable vorliegen, kann man das grafische Verfahren nicht mehr anwenden, sondern benötigt das **Simplexverfahren.**

Einführung von Schlupfvariablen:

Die Mengenungleichung $x + y + z \le 2000$ wird zu: $x + y + z + u = 2000$

Die Kostenungleichung $x + 1{,}5y + 2z \le 3200$ wird zu: $x + 1{,}5y + 2z + v = 3200$

Die Ungleichung $z \le 1000$ wird zu: $z + w = 1000$

Die Zielfunktion lautet: $h = 4x + 5y + 6z$, also: $4x + 5y + 6z = h$

Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z + u & = & 2000 \\ x + 1{,}5y + 2z + v & = & 3200 \\ z + w & = & 1000 \\ 4x + 5y + 6z & = & h \end{array}\right\} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1{,}5 & 2 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 3200 \\ 1000 \\ h \end{pmatrix}$$

Erstellung des Simplex-Tableaus:

x	y	z	u	v	w	
1	1	1	1	0	0	2000
1	1,5	2	0	1	9	3200
0	0	$\boxed{1}$	0	0	1	1000
4	5	6	0	0	0	h

Einschränkung:

$\frac{2000}{1} = 2000$

$\frac{3200}{2} = 1600$

$\frac{1000}{1} = \boxed{1000}$

Die größte Zahl der Zielfunktionszeile ist 6 in der z-Spalte. Die größte Einschränkung liefert die 3. Zeile, also wird das Matrixglied $a_{33} = 1$ zum Pivot-Element.

Die 3. Spalte ist also die Pivot-Spalte, die 3. Zeile zur Pivotzeile.

Umformungen nach Gauß, so dass die Pivot-Spalte außer dem Pivot-Element nur Nullen enthält:

x	y	z	u	v	w				x	y	z	u	v	w	
1	1	1	1	0	0	2000	$-Z3$		1	1	0	1	0	–1	1000
1	1,5	2	0	1	0	3200	$-2\cdot Z3$	~	1	1,5	0	0	1	–2	1200
0	0	$\boxed{1}$	0	0	1	1000			0	0	$\boxed{1}$	0	0	1	1000
4	5	6	0	0	0	h	$-6\cdot Z3$		4	5	0	0	0	–6	h – 6000

Einschränkung:

$\frac{1000}{1} = 1000$

$\frac{1200}{1,5} = 800$

$\cancel{\text{"}\frac{1000}{0} = \infty\text{"}}$

Da die Zahl 5 nunmehr die größte in der Zielzeile ist, wird die 2. Palte zur Pivot-Spalte.

Anschließend sucht man die größte Einschränkung, indem man die Absolutgliederspalte durch die Zahlen der y-Spalte dividiert (rechts außen). Die kleinste Zahl, also die größte Einschränkung erhält man in der Zahl 800, also wird die 2. Zeile zur Pivot-Zeile, und a_{22} = 1,5 ist das Pivot-Element.

Es folgt der 2. Simplex-Algorithmus:

x	y	z	u	v	w				x	y	z	u	v	w	
1	1	0	1	0	–1	1000	$3\cdot Z1 - 2\cdot Z2$		1	0	0	3	–2	1	600
1	$\boxed{1,5}$	0	0	1	–2	1200		~	1	$\boxed{1,5}$	0	0	1	–2	1200
0	0	1	0	0	1	1000			0	0	1	0	0	1	1000
4	5	0	0	0	–6	h – 6000	$3\cdot Z3 - 10\cdot Z2$		2	0	0	0	–10	2	3h – 30.000

$\frac{600}{1} = 600$

$\frac{1200}{1,} = 1200$

$\cancel{\text{"}\frac{1000}{0} = \infty\text{"}}$

Nun wird die 1. Spalte (x-Spalte) zur Pivot-Spalte mit folgenden Einschränkungen:

Da die 1. Zeile die größte Einschränkung ergibt, wird sie zu Pivot-Zeile und a_{11}=1 das Pivot-Element.

Es folgt der 3. Simplex-Algorithmus:

x	y	z	u	v	w				x	y	z	u	v	w	
$\boxed{1}$	0	0	3	–2	1	600			$\boxed{1}$	0	0	3	–2	1	600
1	1,5	0	0	1	–2	1200	$-Z1$	~	0	1,5	0	–3	3	–3	600
0	0	1	0	0	1	1000			0	0	1	0	0	1	1000
2	0	0	0	–10	2	3h – 30.000	$-2\cdot Z1$		0	0	0	–6	–6	0	3h – 31.200

: 1,5 ~

x	y	z	u	v	w	
1	0	0	3	–2	1	600
0	1	0	–2	2	–2	400
0	0	1	0	0	1	1000
0	0	0	–6	–6	0	3h – 31.200

Die Umformungen sind beendet, weil es keine positive Zahl mehr in der Zielzeile gibt.

Es folgt nun die Auswertung, die hier zeigt, dass es keine eindeutige Lösung gibt!

Auswertung:

x	y	z	u	v	w	
1	0	0	3	–2	1	600
0	1	0	–2	2	–2	400
0	0	1	0	0	1	1000
0	0	0	–6	–6	0	3h – 31.200

Aus der 4. Zeile folgt:

$3h - 31.200 = -6u - 6v \quad \Leftrightarrow \quad h = 10400 - 2u - 2v$.

Der Heizwert wird also maximal für u = 0 und v = 0.

Maximalwert von h: $h_{max} = 10400$

Wie man sieht, ist dieser maximale Heizwert von w offenbar unabhängig. Also gibt es keine eindeutige Lösung für die Zusammensetzung der Brennstoffe: Das sollte man untersuchen:

(1) Die einfachste Möglichkeit ist, wenn man auch noch w = 0 wählt, dann führen die Gleichungen der oberen drei Zeilen zu:

1. Zeile: $x + 3u - 2v + w = 600 \quad \Rightarrow \quad x = 600$

2. Zeile: $y - 2u + 2v - 2w = 400 \quad \Rightarrow \quad y = 400$

3. Zeile: $z + w = 1000 \quad \Rightarrow \quad z = 1000$.

Auch daraus kann man den maximalen Heizwert berechnen:

$$\boxed{h(600,400,1000) = 4 \cdot 600 + 5 \cdot 400 + 6 \cdot 1000 = 2400 + 2000 + 6000 = 10.400}$$

(2) Andeutung einer zweiten Lösung:

Die 3. Zeile gehört zur Gleichung $z + w = 1000$, die daraus resultiert, dass die Vorgabe lautete: Höchstens 1000 VE Buchenholz sind zu verwenden. w ist die zugehörige Schlupfvariable, die also angibt, wie viele VE man weniger als 1000 VE nimmt.

Wenn ich jetzt w = 200 ***wähle***, dann müssen also z = 800 VE Buchenholz verwendet werden.

Setzt man dies (zusammen mit u = v = 0) in die 1. Zeile ein,

folgt aus $x + 3u - 2v + w = 600 \quad \Rightarrow \quad x + 200 = 600 \quad \Leftrightarrow \quad x = 400$

und aus $y - 2u + 2v - 2w = 400 \quad \Rightarrow \quad y - 400 = 400 \quad \Leftrightarrow \quad y = 800$.

Dann besteht der Einkauf aus x = 400 VE Nadelholz, y = 800 VE Laubmischholz und z = 800 VE Buchenholz. Dies ergibt denselben maximalen Heizwert:

$$\boxed{h(400,800,800) = 4 \cdot 400 + 5 \cdot 800 + 6 \cdot 800 = 1600 + 4000 + 4800 = 10.400}$$

Worin besteht nun der Unterschied zwischen diesen beiden Möglichkeiten?

Schauen wir uns die Gesamtkosten an: Kostenfunktion: $k(x,y,z) = x + 1{,}5y + 2z$

$k(600,400,1000) = 600 + 1{,}5 \cdot 400 + 2 \cdot 1000 = 3200$ GE

$k(400,800,800) = 400 + 1{,}5 \cdot 800 + 2 \cdot 800 = 3200$ GE

Also haben wir zwei Lösungen mit gleichem Heizwert und denselben Kosten.

Zur weiteren Auswahl kann man dann ein neues Kriterium entscheiden lassen ...

Zusatz: Lösung mit dem „Maxi-Tableau“

BV	x	y	z	u	v	w	b_i	EB
u	1	1	1	1	0	0	2000	$\frac{2000}{1} = 2000$
v	1	1,5	2	0	1	0	3200	$\frac{3200}{2} = 1600$
w	0	0	$\boxed{1}$	0	0	1	1000	$\frac{1000}{1} = 1000$
E_1	4	5	6	0	0	0	H	
u	1	1	0	1	0	-1	1000	$\frac{1000}{1} = 1000$
v	1	$\boxed{1,5}$	0	0	1	-2	1200	$\frac{1200}{1,5} = 800$
z	0	0	1	0	0	1	1000	----
E_2	4	5	0	0	0	-6	h-30000	
u	$\boxed{1}$	0	0	3	-2	1	600	$\frac{600}{1} = 600$
y	1	1,5	0	0	1	-2	1200	$\frac{1200}{1} = 1200$
z	0	0	1	0	0	1	1000	----
E_3	2	0	0	0	-10	2	3h-30000	
x	1	0	0	3	-2	1	600	
y	0	1,5	0	-3	3	-3	600	
z	0	0	1	0	0	1	1000	
E_4	0	0	0	-6	-6	-1	3h-31200	

Manche Lehrer verwenden an Stelle der einzelnen Simplex-Tableaus dieses sich inzwischen verbreitende (ich nenne es) „Maxi-Tableau“, in dem die 4 Tableaus zusammengefasst sind.

In der rechten Hilfsspalte stehen die Berechnungen zum Finden der Pivot-Zeilen. Die Pivot-Elemente stehen in einem Kästchen.